Elementarna matematika 2

Rješenja zadataka s vježbi
Sedmi tjedan

Zadatak 1. Odredite omjer površine trokuta ABC i trokuta razapetog njegovim težišnicama.

Rješenje. Površina trokuta je
$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

Za težišnicu $\vec{t_b}$ iz vrha B vrijedi $\vec{t_b} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Za težišnicu $\vec{t_c}$ iz vrha C vrijedi $\vec{t_c} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Površina trokuta razapetog težišnicama je onda
$$\frac{1}{4}|(-2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \times (-2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})| = \frac{3}{4}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|,$$
pa je omjer površina $1/2 : 3/4 = 2 : 3$.

□

Zadatak 2. Točka S nalazi se unutar trokuta ABC. Neka su P_a, P_b, P_c redom površine trokuta SBC, SCA, SAB. Dokažite da vrijedi
$$P_a \cdot \overrightarrow{SA} + P_b \cdot \overrightarrow{SB} + P_c \cdot \overrightarrow{SC} = 0.$$

Rješenje. Kako su $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}$ baza za ravninu, vrijedi $\overrightarrow{SC} = \alpha\overrightarrow{SA} + \beta\overrightarrow{SB}$. Tvrdimo da su α i β negativni. Naime, zapišimo $\alpha\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SA'}$ i $\beta\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SB'}$. Tada je, po definiciji zbrajanja vektora, $SA'CB'$ paralelogram, a kako je S unutar trokuta ABC, jedini način na koji je to moguće je ako su A' i B' sa suprotnih strana od S u odnosu na A i B, odnosno $\alpha < 0$, $\beta < 0$.

Sada pomnožimo obje strane u $\overrightarrow{SC} = \alpha\overrightarrow{SA} + \beta\overrightarrow{SB}$ vektorski sa $\overrightarrow{SB}$. Dobivamo $\overrightarrow{SB} \times \overrightarrow{SC} = \alpha\overrightarrow{SB} \times \overrightarrow{SA}$. Uzimanjem apsolutnih vrijednosti i korištenjem $\alpha < 0$ te činjenice da je vektorski produkt stranica jednak dvostrukoj površini trokuta po apsolutnoj vrijednosti, dobivamo $2P_a = -2\alpha P_c$. Analogno je $2P_b = -2\beta P_c$.

Uvrštavanjem $\overrightarrow{SC}$ sa $\frac{-P_b}{P_c}\overrightarrow{SB} + \frac{-P_a}{P_c}\overrightarrow{SA}$ u jednakost koju želimo dokazati slijedi tvrdnja.

□

Zadatak 3. Neka su $\vec{a_1}$ i $\vec{a_2}$ nekolinearni vektori u prostoru. Ako za vektore $\vec{b}$ i $\vec{c}$ vrijedi $\vec{a_1} \times \vec{b} = \vec{a_1} \times \vec{c}$ i $\vec{a_2} \times \vec{b} = \vec{a_2} \times \vec{c}$, dokažite da je $\vec{b} = \vec{c}$.

Rješenje. Vrijedi $\vec{a_1} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a_2} \times (\vec{b} - \vec{c}) = 0$, pa je $\vec{b} - \vec{c}$ paralelan i s $\vec{a}_1$ i s $\vec{a}_2$, pa mora biti jednak $\vec{0}$. □

Zadatak 4. Dani su vektori $\vec{v} = (-2, 2, 1)$ i $\vec{w} = (2, 1, 0)$. Odredite
$$\vec{v} \times (\vec{v} \times (\ldots(\vec{v} \times \vec{w}))\ldots)),$$
gdje se u gornjem izrazu znak $\times$ pojavljuje 2024 puta.

Rješenje. Norma vektora $\vec{v}$ je 3, a norma od $\vec{v} \times \vec{w}$ je $\sqrt{5}$, pa je norma rezultata jednaka $3^{2023} \cdot \sqrt{41}$. Preostaje odrediti smjer i orijentaciju rezultata. Neka je $\vec{z} = \vec{v} \times \vec{w}$. Tada $\vec{v}$, $\vec{z}$ i $\vec{v} \times \vec{z}$ čine pozitivno orijentiranu ortogonalnu bazu, pa je $\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{z})$ jednak $-c\vec{z}$ za neki $c > 0$. Gledajući samo smjer i orijentaciju (ignoriramo normu), dobivamo da nakon jednog množenja imamo $\vec{z}$, nakon dva množenja $\vec{v} \times \vec{z}$, nakon tri množenja $-\vec{z}$, nakon četiri množenja $-\vec{v} \times \vec{z}$, nakon pet množenja $\vec{z}$, i sve se ponavlja s periodom 4. Nakon 2024 množenja dobivamo smjer od $-\vec{v} \times \vec{z}$.

Preostaje izračunati $\vec{z}$ i $\vec{v} \times \vec{z}$. Imamo $\vec{z} = \vec{v} \times \vec{w} = (-1, 2, -6)$, $\vec{v} \times \vec{z} = (-14, -13, -2)$, pa je smjer traženog vektora jednak $(14, 13, 2)$. Kad to normiramo i pomnožimo s $3^{2023} \cdot \sqrt{41}$, dobivamo rezultat. □

Zadatak 5. Dokažite da plošne dijagonale paralelepipeda koje izlaze iz jednog vrha razapinju paralelepiped dvostruko većeg volumena.

Rješenje. Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektori koji razapinju paralelepiped. Vektori plošnih dijagonala su onda $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{c} + \vec{a}$. Sada stavimo vektore $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{c} + \vec{a}$ kao retke matrice i računamo

$$\det \begin{pmatrix} \vec{a} + \vec{b} \\ \vec{a} + \vec{c} \\ \vec{b} + \vec{c} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{a} + \vec{b} \\ \vec{c} - \vec{b} \\ \vec{b} + \vec{c} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{a} + \vec{b} \\ \vec{c} - \vec{b} \\ 2\vec{c} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{a} \\ -\vec{b} \\ 2\vec{c} \end{pmatrix},$$

što je po alsolutnoj vrijednosti dvostruko veće od $\det \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix}$, pa tvrdnja slijedi. □

Zadatak 6. Odredite volumen tetraedra $ABCD$, ako znate da vektori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ u nekoj ortonormiranoj bazi redom imaju prikaz $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 4, 9)$.

Rješenje. Volumen tetraedra je $\frac{1}{3}Bh$, gdje je B površina baze, a h duljina visine. To je 1/3 volumena prizme čija baza je trokut BCD i čiji jedan vrh izvan te baze je A. To je pak 1/2 volumena paralelepipeda čija je baza paralelogram sastavljen od dvije kopije trokuta BCD i kojem je A jedan od vrhova. Zaključujemo da je volumen jednak $\frac{1}{6}$ volumena paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{AB}, \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$, odnosno

$$\frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}.$$

□

Zadatak 7. Zadani su vektori $\vec{a} = (1, 1, 2), \vec{b} = (1, 2, 1)$, $\vec{c} = (2, 1, 1)$. Za $x, y \geqslant 0$ za koje je $x + y = 1$, označimo s $V(x, y)$ volumen paralelepipeda razapetog vektorima $x\vec{a} + y\vec{b}$, $x\vec{b} + y\vec{c}$, $x\vec{c} + y\vec{a}$. Odredite najveću i najmanju vrijednost koju može poprimiti $V(x, y)$.

Rješenje. Imamo $x\vec{a} + y\vec{b} = (x + y, x + 2y, 2x + y)$, $x\vec{b} + y\vec{c} = (x + 2y, 2x + y, x + y)$, $x\vec{c} + y\vec{a} = (2x + y, x + y, x + 2y)$. Volumen paralelepipeda je jednak apsolutnoj vrijednosti determinante matrice čiji retci su pripadni vektori. Drugim riječima,

$$V(x, y) = \det \begin{pmatrix} x + y & x + 2y & 2x + y \\ x + 2y & 2x + y & x + y \\ 2x + y & x + y & x + 2y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 + y & 1 + x \\ 1 + y & 1 + x & 1 \\ 1 + x & 1 & 1 + y \end{pmatrix}.$$

Korištenjem $y = 1 - x$, dobivamo funkciju jedne varijable (polinom stupnja 3) kojoj treba naći minimum i maksimum na segmentu $[0, 1]$. Deriviranjem se dobiva da funkcija postiže maksimum za $x = y = 1/2$, a minimum za $x = 0, y = 1$ ili $y = 0, x = 1$. (Ovdje nedostaje nešto argumenata, ali geometrijski dio zadatka je tu).

□